Grundlagen der Mathematischen Statistik

Testen von Hypothesen
Teil II: Einige parametrische Tests

Uwe Menzel, 2017
uwe.menzel@matstat.org
www.matstat.org

Z-Test

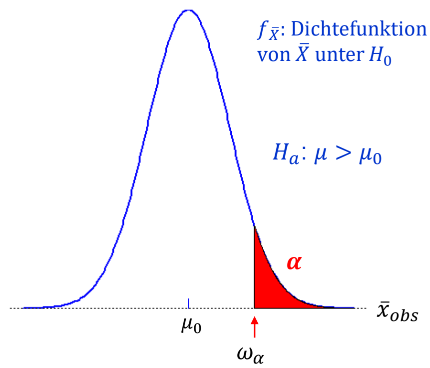
- testet eine Hypothese für den Erwartungswert μ in einer normalverteilten Population
- Annahme: Standardabweichung σ ist bekannt.
- Nullhypothese: $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 = hypothetischer Wert)
- Alternative Hypothesen:
  - $H_a: \mu > \mu_0$ (einseitiger Test)
  - $H_a: \mu < \mu_0$ (einseitiger Test)
  - $H_a: \mu \neq \mu_0$ (zweiseitiger Test)
- Stichprobe $\rightarrow \bar{x}_{obs}$ (Observation des Punktschätzers $\bar{X}$ für μ)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$ Punktschätzer für μ

$$X_i \sim N(\mu, \sigma)$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Z-Test für $H_a: \mu > \mu_0$

Die Nullhypothese (H_0) wird verworfen, wenn die Observation $\bar{x}_{obs}$ des Punktschätzers $\bar{X}$ einen kritischen Wert ω_α in Richtung der alternativen Hypothese überschreitet (Abb.), also für $\bar{x}_{obs} > \omega_\alpha$. Der kritische Wert ω_α ergibt sich aus dem zuvor festgelegten Signifikanzniveau α (= Wahrscheinlichkeit für den Fehler Typ I; rot markierte Fläche = Wert von α).



Z-Test für $H_a: \mu > \mu_0$

Wenn die Nullhypothese $\mu = \mu_0$ wahr ist, dann gilt $X_i \sim N(\mu_0, \sigma)$ und daher

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

eine $N(0,1)$-Variable wird oft mit Z bezeichnet

Für H_a: $\mu > \mu_0$ und ein zuvor festgelegtes Signifikanzniveau α kann der kritische Wert ω_α für die Teststatistik $\bar{X}$ aus folgender Gleichung berechnet werden (siehe Vorlesung **F11**) :

$$\boxed{P\left(\underbrace{\bar{X} > \omega_\alpha}_{H_0 \text{ wird verworfen}} \mid H_0 \; wahr\right) = \alpha}$$

Fehler Typ I

Bestimmungsgleichung für ω_α für vorgegebenes α

Die Gleichung bedeutet: die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 (obwohl wahr) verworfen wird, soll α sein (= Wahrscheinlichkeit für Fehler Typ I). Durch Umformen in der Klammer erhalten wir:

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\omega_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Unter H_0 ist der linke Term in der Klammer $N(0,1)$-verteilt. Die Bedingung "| H_0 *wahr*" ist damit "verarbeitet".

uwe.menzel@matstat.org

Z-Test für $H_a\colon \mu > \mu_0$

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\omega_\alpha-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Unter H_0 ist der linke Term in der Klammer $N(0,1)$-verteilt, er wird daher mit Z abgekürzt.

$$P\left(Z > \frac{\omega_\alpha-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha \qquad Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Allgemein gilt:

$P(Z > \lambda_\alpha) = \alpha$ Definition der Quantile für $N(0,1)$

Vergleich der letzten beiden Ausdrücke ergibt $\lambda_\alpha = \frac{\omega_\alpha-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$\Rightarrow$ $\omega_\alpha = \mu_0 + \lambda_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Kritischer Wert für $\bar{X}$ beim Z-Test mit $H_a\colon \mu > \mu_0$; H_0 wird verworfen für $\bar{x}_{obs} > \omega_\alpha$

Die Nullhypothese H_0 wird also verworfen für $\bar{x}_{obs} > \mu_0 + \lambda_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Z-Test für $H_a\colon \mu > \mu_0$

Die Nullhypothese H_0 wird also verworfen für $\bar{x}_{obs} > \mu_0 + \lambda_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

bzw. für $\frac{\bar{x}_{obs}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \lambda_\alpha$

$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Im Allgemeinen wird als Testvariable nicht $\bar{X}$, sondern Z benutzt. Eine Observation von Z kann mit z_{obs} bezeichnet werden:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Observation der Testvariablen $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

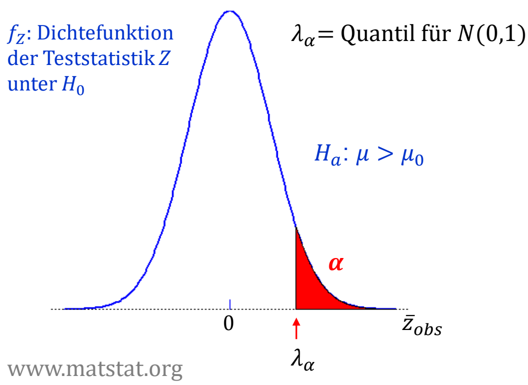
Die Nullhypothese wird somit verworfen, wenn $z_{obs} > \lambda_\alpha$

Z-Test für H_a: $\mu > \mu_0$

$$\boxed{z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

Observation der Testvariablen $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

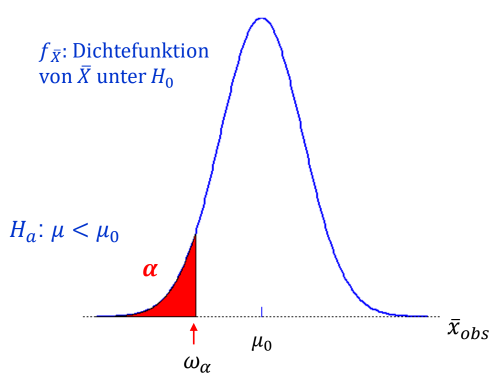
Die Nullhypothese wird somit verworfen, wenn $z_{obs} > \lambda_\alpha$



www.matstat.org

Z-Test für H_a: $\mu < \mu_0$

Die Nullhypothese (H_0) wird verworfen, wenn die Observation $\bar{x}_{obs}$ des Punktschätzers $\bar{X}$ einen kritischen Wert ω_α in Richtung der alternativen Hypothese überschreitet (Abb.), in diesem Fall für $\bar{x}_{obs} < \omega_\alpha$. Der kritische Wert ω_α ergibt sich aus dem zuvor festgelegten Signifikanz-niveau α (= Wahrscheinlichkeit für den Fehler Typ I).



www.matstat.org

Z-Test für H_a: $\mu < \mu_0$

Wenn die Nullhypothese $\mu = \mu_0$ wahr ist, dann gilt $X_i \sim N(\mu_0, \sigma)$ und daher

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

eine $N(0,1)$-Variable wird oft mit Z bezeichnet

Für H_a: $\mu < \mu_0$ und ein zuvor festgelegtes Signifikanzniveau α kann der kritische Wert ω_α für die Teststatistik $\bar{X}$ aus folgender Gleichung berechnet werden (siehe Vorlesung **F11**) :

$$\boxed{P\left(\underbrace{\bar{X} < \omega_\alpha}_{H_0 \text{ wird verworfen}} \mid H_0\ wahr\right) = \alpha}$$

Bestimmungsgleichung für ω_α für vorgegebenes α

Fehler Typ I

Die Gleichung bedeutet: die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 (obwohl wahr) verworfen wird, soll α sein (= Wahrscheinlichkeit für Fehler Typ I). Durch Umformen in der Klammer erhalten wir:

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\omega_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Unter H_0 ist der linke Term in der Klammer $N(0,1)$-verteilt. Die Bedingung "| H_0 *wahr*" ist damit "verarbeitet".

Z-Test für H_a: $\mu < \mu_0$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\omega_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

Unter H_0 ist der linke Term in der Klammer $N(0,1)$-verteilt, er soll daher mit Z abgekürzt werden.

$$P\left(Z < \frac{\omega_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha \qquad Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Allgemein gilt:

$$P(Z < -\lambda_\alpha) = \alpha$$

Folgt aus der Definition der Quantile für $N(0,1)$

Vergleich der letzten beiden Ausdrücke ergibt $-\lambda_\alpha = \frac{\omega_\alpha - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow \omega_\alpha = \mu_0 - \lambda_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Kritischer Wert für $\bar{X}$ beim Z-Test mit H_a: $\mu < \mu_0$; H_0 wird verworfen für $\bar{x}_{obs} < \omega_\alpha$

Die Nullhypothese H_0 wird also verworfen für $\bar{x}_{obs} < \mu_0 - \lambda_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Z-Test für H_a: $\mu < \mu_0$

Die Nullhypothese H_0 wird also verworfen für $\bar{x}_{obs} < \mu_0 - \lambda_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

bzw. für $\frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -\lambda_\alpha$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Im Allgemeinen wird als Testvariable nicht $\bar{X}$, sondern Z benutzt. Eine Observation von Z kann mit z_{obs} bezeichnet werden:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$ Observation der Testvariablen $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Die Nullhypothese wird somit verworfen, wenn $z_{obs} < -\lambda_\alpha$

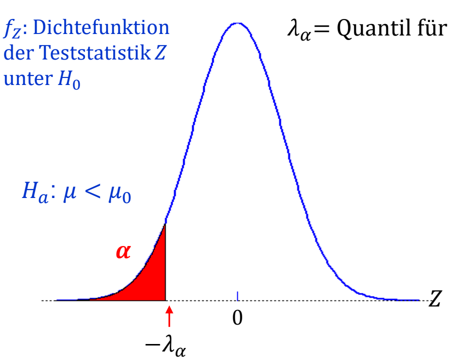
Z-Test für H_a: $\mu < \mu_0$

$$\boxed{z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$ Observation der Testvariablen $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Die Nullhypothese wird somit verworfen, wenn $z_{obs} < -\lambda_\alpha$

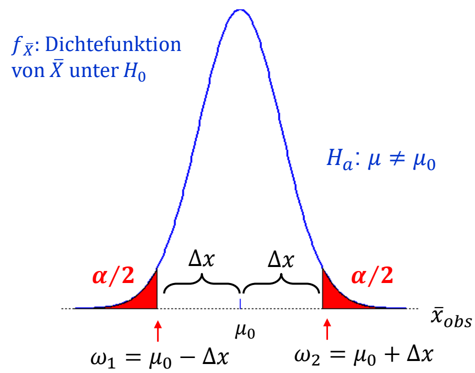
f_Z: Dichtefunktion der Teststatistik Z unter H_0

λ_α= Quantil für $N(0,1)$



Z-Test für $H_a: \mu \neq \mu_0$

Die Nullhypothese (H_0) wird verworfen, wenn die Observation $\bar{x}_{obs}$ des Punktschätzers $\bar{X}$ einen der kritischen Werte $\omega_{2,1} = \mu_0 \pm \Delta x$ in Richtung der alternativen Hypothese überschreitet, also für $|\bar{x}_{obs} - \mu_0| > \Delta x$ (Abb.). Die kritischen Werte $\omega_{2,1}$ ergeben sich aus dem zuvor festgelegten Signifikanzniveau α (= Wahrscheinlichkeit für Fehler Typ I; rot markierte Flächen).



Z-Test für $H_a: \mu \neq \mu_0$

Wenn die Nullhypothese $\mu = \mu_0$ wahr ist, dann gilt $X_i \sim N(\mu_0, \sigma)$ und daher

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Für $H_a: \mu \neq \mu_0$ und ein zuvor festgelegtes Signifikanzniveau α können die kritischen Werte $\omega_{2,1}$ für die Teststatistik $\bar{X}$ aus folgender Gleichung berechnet werden (siehe Vorlesung **F11**) :

$$\boxed{P(\underbrace{|\bar{X} - \mu_0| > \Delta x}_{H_0 \text{ wird verworfen}} \mid H_0 \; wahr) = \alpha}$$

Bestimmungsgleichung für $\omega_{2,1} = \mu_0 \pm \Delta x$

Fehler Typ I

Die obige Formel gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass $\bar{X}$ entweder größer als $\omega_2 = \mu_0 + \Delta x$ oder kleiner als $\omega_1 = \mu_0 - \Delta x$ wird. Aufgrund der Symmetrie der Dichtefunktion ist diese Wahrscheinlichkeit doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass $\bar{X}$ größer als ω_2 wird. Wir können also die Bestimmungsgleichung vereinfachen →

Z-Test für $H_a: \mu \neq \mu_0$

$$P\left(|\bar{X}-\mu_0| > \Delta x \mid H_0\ wahr\right) = \alpha$$

Bestimmungsgleichung für $\omega_{2,1} = \mu_0 \pm \Delta x$

$$2 \cdot P\left(\bar{X} > \mu_0 + \Delta x \mid H_0\ wahr\right) = \alpha$$

wegen Symmetrie

$$P\left(\bar{X} > \mu_0 + \Delta x \mid H_0\ wahr\right) = \alpha/2$$

Umformen in der Klammer →

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\Delta x}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha/2$$

Unter H_0 ist der linke Term in der Klammer $N(0,1)$-verteilt. Die Bedingung "| H_0 *wahr*" ist damit "verarbeitet".

$$P\left(Z > \frac{\Delta x}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha/2 \qquad Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Allgemein gilt: $P\left(Z > \lambda_{\alpha/2}\right) = \alpha/2$ durch Verleich erhält man daher

$$\lambda_{\alpha/2} = \frac{\Delta x}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow \Delta x = \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Die Nullhypothese H_0 wird also verworfen für $|\bar{x}_{obs} - \mu_0| > \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

www.matstat.org

Z-Test für $H_a: \mu \neq \mu_0$

Die Nullhypothese H_0 wird also verworfen für $|\bar{x}_{obs} - \mu_0| > \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

bzw. für $\frac{|\bar{x}_{obs} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > \lambda_{\alpha/2}$

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Im Allgemeinen wird als Testvariable nicht $\bar{X}$, sondern Z benutzt. Eine Observation von Z kann mit z_{obs} bezeichnet werden:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Observation der Testvariablen $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Die Nullhypothese wird somit verworfen, wenn $|z_{obs}| > \lambda_{\alpha/2}$

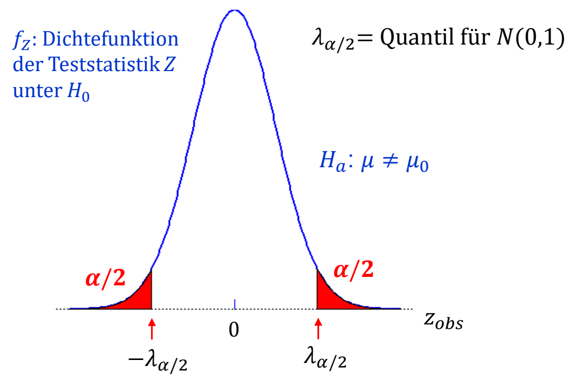
www.matstat.org

Z-Test für H_a: $\mu \neq \mu_0$

$$\boxed{z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

Observation der Testvariablen $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Die Nullhypothese wird somit verworfen, wenn $|z_{obs}| > \lambda_{\alpha/2}$



www.matstat.org

Zusammenfassung: Z-Test

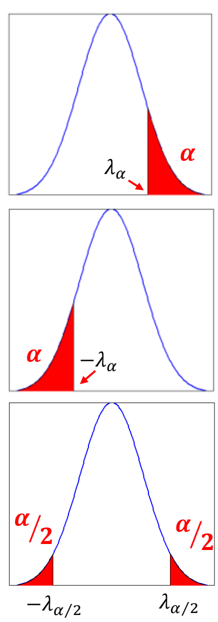
H_0	H_a	Test
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	einseitig

$$\bar{x}_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

H_0	H_a	Test
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	einseitig

$$z_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

H_0	H_a	Test
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	zweiseitig



verwerfe H_0 wenn $z_{obs} > \lambda_\alpha$

verwerfe H_0 wenn $z_{obs} < -\lambda_\alpha$

verwerfe H_0 wenn $|z_{obs}| > \lambda_{\alpha/2}$

www.matstat.org

t-Test für eine Stichprobe

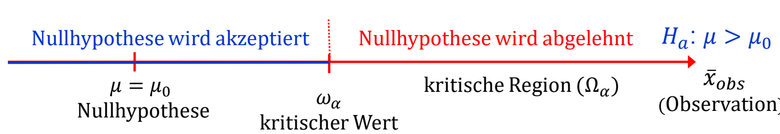
- testet eine Hypothese für den Erwartungswert μ in einer normalverteilten Population
- Standardabweichung σ unbekannt (im Unterschied zum Z-Test)
- Nullhypothese: $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 = hypothetischer Wert)
- Alternative Hypothesen:
  - $H_a: \mu > \mu_0$ (einseitiger Test)
  - $H_a: \mu < \mu_0$ (einseitiger Test)
  - $H_a: \mu \neq \mu_0$ (zweiseitiger Test)
- Stichprobe → $\bar{x}_{obs}$ (Observation des Punktschätzers $\bar{X}$ für μ)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Punktschätzer für μ — Punktschätzer für σ^2

t-Test für $H_a: \mu > \mu_0$

- Die Nullhypothese (H_0) wird verworfen, wenn die Observation $\bar{x}_{obs}$ des Punktschätzers $\bar{X}$ einen kritischen Wert ω_α in Richtung der alternativen Hypothese überschreitet. Für $H_a: \mu > \mu_0$ ist dies der Fall wenn $\bar{x}_{obs} \gg \mu_0$.
- Wir wissen, dass eine Observation mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den kritischen Wert in Richtung der alternativen Hypothese überschreiten kann, **obwohl** die Nullhypothese wahr ist (Fehler Typ I).
- Der kritische Wert ω_α wird so justiert, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler vom Typ I einen vom Anwender vorher bestimmten Wert α (Signifikanzniveau) annimmt.



t-Test für H_a: $\mu > \mu_0$

Wenn die Nullhypothese $\mu = \mu_0$ wahr ist, dann gilt $X_i \sim N(\mu_0, \sigma)$ und daher

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Die Standardabweichung σ ist jedoch unbekannt, deshalb kann Z nicht als Teststatistik benutzt werden. (Es kann kein numerischer Wert für eine Observation von Z berechnet werden). Wir wissen jedoch (Vorlesung **F9**), dass wir eine t-verteilte Variable erhalten, wenn σ im obigen Ausdruck durch den Schätzer S ersetzt wird:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$t(n-1)$: Students t–Verteilung für $n-1$ Freiheitsgrade

Die Verteilung von T ist vollständig bekannt; eine Observation von T kann aus der Stichprobe berechnet werden (μ_0 ist der hypothetische Parameter, also ebenfalls bekannt). Eine Observation von T soll im Folgenden mit t_{obs} bezeichnet werden:

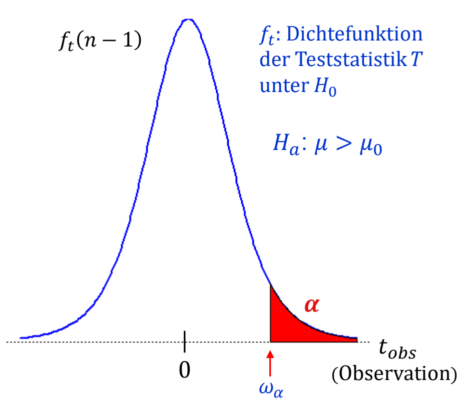
$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Observation von T

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

t-Test für H_a: $\mu > \mu_0$

Die t-Verteilung ist symmetrisch um den Nullpunkt (Abb.). Wenn die Nullhypothese wahr ist, sollte die Observation t_{obs} nicht zu weit vom Nullpunkt entfernt liegen, da dann $\bar{x}_{obs} \approx \mu_0$. Wir sind geneigt, die alternative Hypothese anzunehmen, wenn $\bar{x}_{obs} \gg \mu_0$. In diesem Fall nimmt t_{obs} große positive Werte an. Wenn schließlich $t_{obs} > \omega_a$ wird H_0 zugunsten der alternativen Hypothese verworfen.



f_t: Dichtefunktion der Teststatistik T unter H_0

H_a: $\mu > \mu_0$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

ω_α: kritischer Wert

t-Test für H_a: $\mu > \mu_0$

Für H_a: $\mu > \mu_0$ und ein zuvor festgelegtes Signifikanzniveau α kann der kritische Wert ω_α für die Teststatistik T aus der Forderung berechnet werden, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler vom Typ I gleich α sein soll:

$$\boxed{P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > \omega_\alpha}_{H_0 \text{ wird verworfen}} \mid H_0\ wahr\right) = \underbrace{\alpha}_{\text{Fehler Typ I}}}$$

Bestimmungsgleichung für ω_α für vorgegebenes α (= Wahrscheinlichkeit für Fehler Typ I)

Unter H_0 ist der linke Term in der Klammer $t(n-1)$-verteilt, wir können also schreiben (womit die Bedingung "| H_0 *wahr*""verarbeitet" ist):
(Der Ausdruck ist dann und nur dann t-verteilt, wenn H_0 wahr ist, also wenn $\mu = \mu_0$)

$$P(T > \omega_\alpha) = \alpha \quad \text{mit} \quad T \sim t(n-1)$$

Allgemein gilt: $P(T > t_\alpha(n-1)) = \alpha$

$t_\alpha(n-1)$ = Quantil für t-Verteilung mit $f = n-1$ und Signifikanzniveau α

Durch Vergleich der beiden letzten Beziehungen erhalten wir für den kritischen Wert $\omega_\alpha = t_\alpha(n-1)$. H_0 wird also verworfen, wenn eine Observation von T größer als $t_\alpha(n-1)$ wird.

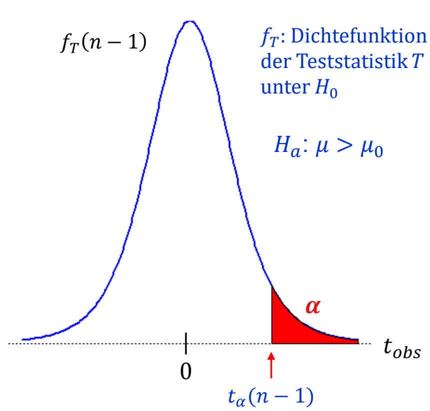
www.matstat.org

t-Test für H_a: $\mu > \mu_0$

$$\boxed{\text{Die Nullhypothese wird verworfen, wenn } t_{obs} > t_\alpha(n-1)}$$

Die kritische Region zum Signifikanzniveau α wird mit Ω_α bezeichnet:

$$\Omega_\alpha = \{t_{obs} > t_\alpha(n-1)\}$$



f_T: Dichtefunktion der Teststatistik T unter H_0

H_a: $\mu > \mu_0$

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

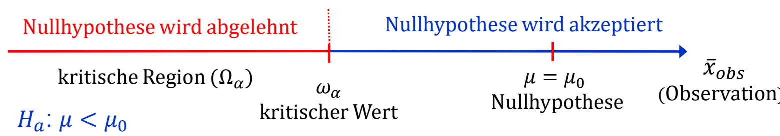
H_0 wird verworfen, wenn die Observation t_{obs} in der kritischen Region (rot) landet.

$t_\alpha(n-1)$ = Quantil für t-Verteilung mit $f = n-1$ für Signifikanzniveau α

www.matstat.org

t-Test für $H_a\colon \mu < \mu_0$

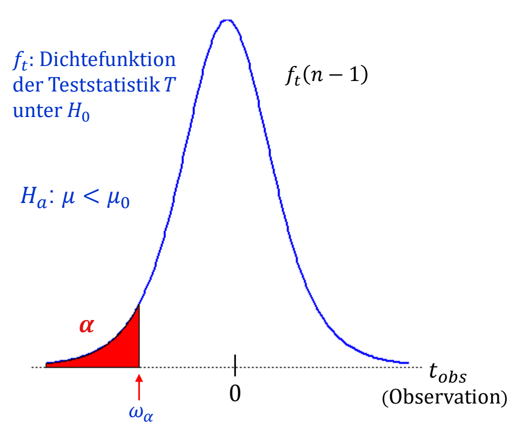
- Die Nullhypothese (H_0) wird verworfen, wenn die Observation $\bar{x}_{obs}$ des Punktschätzers $\bar{X}$ einen kritischen Wert ω_α in Richtung der alternativen Hypothese überschreitet. Für $H_a\colon \mu < \mu_0$ ist dies der Fall wenn $\bar{x}_{obs} \ll \mu_0$.
- Wir wissen, dass eine Observation mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den kritischen Wert in Richtung der alternativen Hypothese überschreiten kann, **obwohl** die Nullhypothese wahr ist (Fehler Typ I).
- Der kritische Wert ω_α wird so justiert, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler vom Typ I einen vom Anwender vorher bestimmten Wert α (Signifikanzniveau) annimmt.



www.matstat.org

t-Test für $H_a\colon \mu < \mu_0$

Wenn die Nullhypothese wahr ist, sollte die Observation t_{obs} wiederum nicht zu weit vom Nullpunkt entfernt liegen, da dann $\bar{x}_{obs} \approx \mu_0$. Ist jedoch $\bar{x}_{obs} \ll \mu_0$, dann nimmt t_{obs} große negative Werte an und wir sind geneigt, die alternative Hypothese anzunehmen. Wenn schließlich $t_{obs} < \omega_\alpha$ wird H_0 zugunsten der alternativen Hypothese verworfen



$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t\,(n-1)$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

ω_α: kritischer Wert

www.matstat.org

t-Test für $H_a\colon \mu < \mu_0$

Für $H_a\colon \mu < \mu_0$ und ein zuvor festgelegtes Signifikanzniveau α kann der kritische Wert ω_α für die Teststatistik T aus der Forderung berechnet werden, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler vom Typ I gleich α sein soll:

$$\boxed{P\Bigg(\underbrace{\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < \omega_\alpha}_{H_0 \text{ wird verworfen}} \mid H_0\ wahr\Bigg) = \underset{\text{Fehler Typ I}}{\alpha}}$$

Bestimmungsgleichung für ω_α für vorgegebenes α (= Wahrscheinlichkeit für Fehler Typ I)

Unter H_0 ist der linke Term in der Klammer $t(n-1)$-verteilt, wir können also schreiben (womit die Bedingung "$|\ H_0\ wahr$""verarbeitet" ist):

$$P\left(T < \omega_\alpha\right) = \alpha \quad \text{mit} \quad T \sim t(n-1)$$

Allgemein gilt: $P\left(T < -t_\alpha(n-1)\right) = \alpha$

$t_\alpha(n-1)$ = Quantil für t-Verteilung mit $f = n-1$ und Signifikanzniveau α

Durch Vergleich der beiden letzten Beziehungen erhalten wir für den kritischen Wert $\omega_\alpha = -t_\alpha(n-1)$. H_0 wird also verworfen, wenn eine Observation von T kleiner als $-t_\alpha(n-1)$ wird.

www.matstat.org

t-Test für $H_a\colon \mu < \mu_0$

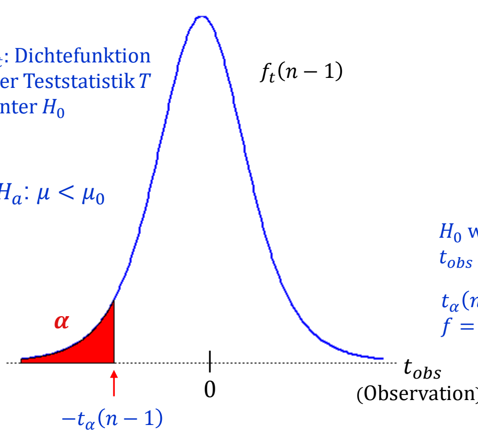
$$\boxed{\text{Die Nullhypothese wird verworfen, wenn} \quad t_{obs} < -t_\alpha(n-1)}$$

Die kritische Region zum Signifikanzniveau α wird mit Ω_α bezeichnet:

$$\Omega_\alpha = \{t_{obs} < -t_\alpha(n-1)\}$$

f_t: Dichtefunktion der Teststatistik T unter H_0

$H_a\colon \mu < \mu_0$



$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t\,(n-1)$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

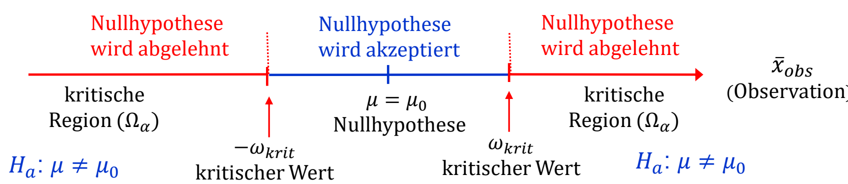
H_0 wird verworfen, wenn die Observation t_{obs} in der kritischen Region (rot) landet.

$t_\alpha(n-1)$ = Quantil für t-Verteilung mit $f = n-1$ für Signifikanzniveau α

www.matstat.org

t-Test für $H_a: \mu \neq \mu_0$

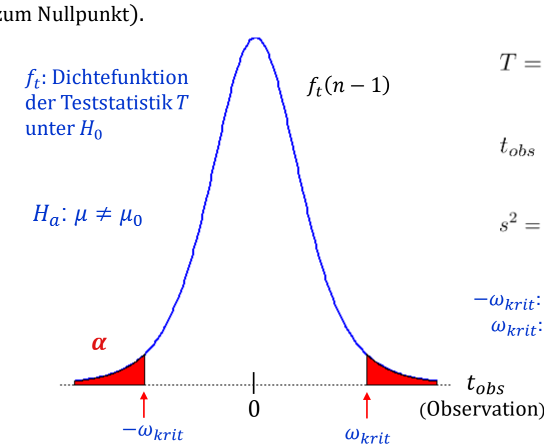
- Die Nullhypothese (H_0) wird verworfen, wenn die Observation $\bar{x}_{obs}$ des Punktschätzers $\bar{X}$ einen kritischen Wert ω_{krit} in Richtung der alternativen Hypothese überschreitet. Für H_a: $\mu \neq \mu_0$ ist dies der Fall wenn $\bar{x}_{obs} \ll \mu_0$ oder $\bar{x}_{obs} \gg \mu_0$.
- Eine Observation kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den kritischen Wert in Richtung der alternativen Hypothese überschreiten, **obwohl** die Nullhypothese wahr ist (Fehler Typ I).
- Der kritische Wert ω_{krit} wird so justiert, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler vom Typ I einen vorher bestimmten Wert α annimmt.



www.matstat.org

t-Test für $H_a: \mu \neq \mu_0$

Unter H_0 sollte $\bar{x}_{obs} \approx \mu_0$ sein. Ist jedoch $\bar{x}_{obs} \ll \mu_0$ oder $\bar{x}_{obs} \gg \mu_0$ dann nimmt t_{obs} große negative oder große positive Werte an. Wir sind dann bereit, die alternative Hypothese anzunehmen. Wenn $t_{obs} < -\omega_{krit}$ oder $t_{obs} > \omega_{krit}$ ist, wird H_0 zugunsten der alternativen Hypothese verworfen (aufgrund der Symmetrie der t-Verteilung liegen die kritischen Werte symmetrisch zum Nullpunkt).



$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t\,(n-1)$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$-\omega_{krit}$: unterer kritischer Wert
ω_{krit}: oberer kritischer Wert

www.matstat.org

t-Test für $H_a: \mu \neq \mu_0$

Für $H_a: \mu \neq \mu_0$ und ein zuvor festgelegtes Signifikanzniveau α können die kritischen Werte $\pm\omega_{krit}$ für die Teststatistik T aus der Forderung berechnet werden, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler vom Typ I gleich α sein soll:

$$\boxed{P\left(\underbrace{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > \omega_{krit}}_{H_0 \text{ wird verworfen}} \mid H_0 \; wahr\right) = \alpha}$$

Fehler Typ I

Bestimmungsgleichung für ω_{krit} für vorgegebenes α (= Wahrscheinlichkeit für Fehler Typ I)

Aus Symmetriegründen (siehe Abb. oben) ist diese Wahrscheinlichkeit doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass die Teststatistik den oberen kritischen Wert übersteigt:

$$2 \cdot P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > \omega_{krit} \mid H_0 \; wahr\right) = \alpha$$

Unter H_0 ist der linke Term in der Klammer $t(n-1)$-verteilt, wir können also schreiben (womit die Bedingung "$\mid H_0 \; wahr$""verarbeitet" ist):

$$P\left(T > \omega_{krit}\right) = \alpha/2 \quad \text{mit} \quad T \sim t(n-1)$$

www.matstat.org

t-Test für $H_a: \mu \neq \mu_0$

$$P\left(T > \omega_{krit}\right) = \alpha/2 \quad \text{mit} \quad T \sim t(n-1)$$

Allgemein gilt: $P\left(T > t_{\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha/2$

$t_{\alpha/2}(n-1)$ = Quantil für t-Verteilung für $f = n-1$

Durch Vergleich der beiden letzten Beziehungen erhalten wir für den oberen kritischen Wert $\omega_{krit} = t_{\alpha/2}(n-1)$.

H_0 wird also verworfen wenn $t_{obs} < -t_{\alpha/2}(n-1)$ oder wenn $t_{obs} > +t_{\alpha/2}(n-1)$, also wenn $|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(n-1)$

$$\boxed{\text{Die Nullhypothese wird verworfen, wenn } \; |t_{obs}| > t_{\alpha/2}(n-1)}$$

Die kritische Region zum Signifikanzniveau α wird mit Ω_α bezeichnet:

$$\Omega_\alpha = \left\{|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$$

www.matstat.org

t-Test für H_a: $\mu \neq \mu_0$

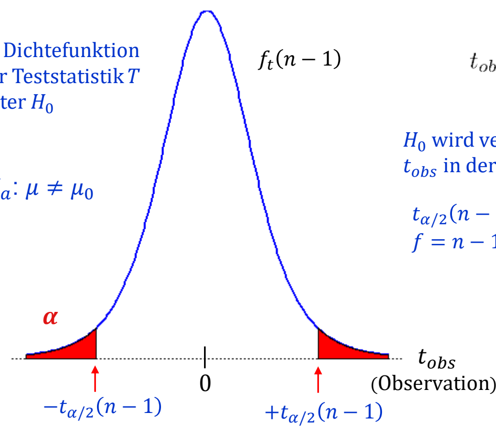
Die Nullhypothese wird verworfen, wenn $|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(n-1)$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t\,(n-1)$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

f_t: Dichtefunktion der Teststatistik T unter H_0

H_a: $\mu \neq \mu_0$



H_0 wird verworfen, wenn die Observation t_{obs} in der kritischen Region (rot) landet.

$t_{\alpha/2}(n-1)$ = Quantil für t-Verteilung mit $f = n-1$ für Signifikanzniveau α

www.matstat.org

Zusammenfassung: t-Test

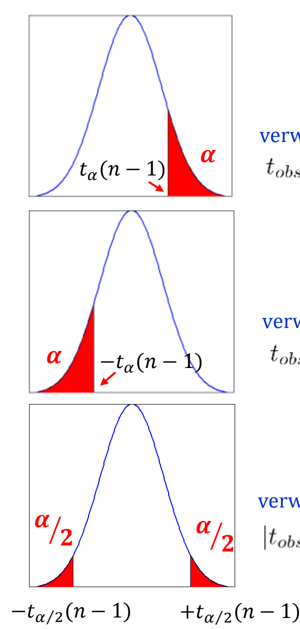
H_0	H_a	Test
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	einseitig

$$\bar{x}_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

H_0	H_a	Test
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	einseitig

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

H_0	H_a	Test
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	zweiseitig



verwerfe H_0 wenn $t_{obs} > t_\alpha(n-1)$

verwerfe H_0 wenn $t_{obs} < -t_\alpha(n-1)$

verwerfe H_0 wenn $|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(n-1)$

www.matstat.org

t-Test, Beispiel: Weiße Blutkörperchen

Die Anzahl der Leukozyten pro ml Blut bei gesunden Erwachsenen ist normalverteilt mit $\mu_0 = 7500$ (gemessen bei Millionen von Menschen, kann deshalb als der wahre Wert des Populationsparameters angesehen werden)

Frage: Haben Astronauten die gleiche durchschnittliche Konzentration von Leukozyten?

Nullhypothese H_0: $\mu = \mu_0 = 7500$

Alternative Hypothese H_a: $\mu \neq \mu_0$ (wir haben keine Ahnung in welche Richtung μ abweichen könnte)

Signifikansniveau $\alpha = 0.05$

Stichprobe: 7130, 6845, 7055, 7235, 7200, 7450, 7750, 7950, 7340, 7150

$$\bar{x}_{obs} = 7310.5 \quad ; \quad s = 330.1$$

Observation für Teststatistik: $$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{7310.5 - 7500}{330.1/\sqrt{10}} = -1.815$$

www.matstat.org

t-Test, Beispiel: Weiße Blutkörperchen

Observation für Teststatistik : $$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{7310.5 - 7500}{330.1/\sqrt{10}} = -1.815$$

Kritische Region: $\Omega_\alpha = \{|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(n-1)\}$ für zweiseitgen Test

$$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(9) = 2.262$$

Vergleich der Teststatistik mit dem kritischen Wert:

$$|t_{obs}| = 1.815 < 2.262 = t_{0.025}(9)$$

Die Teststatistik t_{obs} liegt **nicht** in der kritischen Region. Die Nullhypothese kann **nicht** verworfen werden. Wir können nicht behaupten, dass Astronauten eine Konzentration von weißen Blutkörperchen haben, die von der "Erdbevölkerung" abweicht. (Ein Verwerfen der Nullhypothese könnte jedoch mit einer größeren Stichprobe gelingen ...)

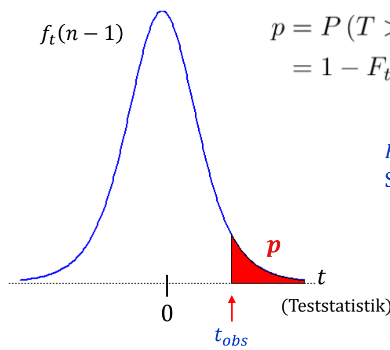
www.matstat.org

Berechnung des p-Wertes, H_a: $\mu > \mu_0$

$X_i \sim N(\mu, \sigma)$ σ unbekannt $H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu > \mu_0$

Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens so extreme Testresultate wie das aktuell beobachte, berechnet unter der Annahme dass die Nullhypothese wahr ist.

Unter H_0 gilt $T \sim t(n-1)$



$$p = P(T > t_{obs}) = 1 - P(T \leq t_{obs})$$
$$= 1 - F_{t(n-1)}(t_{obs}) = F_{t(n-1)}(-t_{obs})$$

(siehe Anhang)

$F_{t(n-1)}(t)$ = Verteilungsfunktion für Student's t, für $n-1$ Freiheitsgrade

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

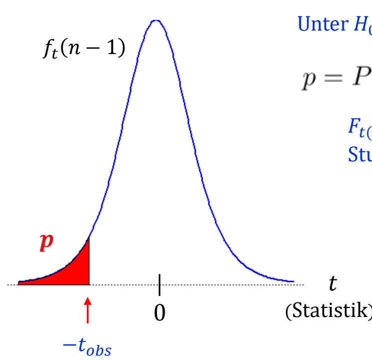
www.matstat.org

Berechnung des p-Wertes, H_a: $\mu < \mu_0$

$X_i \sim N(\mu, \sigma)$ σ unbekannt $H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu < \mu_0$

Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens so extreme Testresultate wie das aktuell beobachte, berechnet unter der Annahme dass die Nullhypothese wahr ist.

Unter H_0 gilt $T \sim t(n-1)$



$$p = P(T \leq t_{obs}) = F_{t(n-1)}(t_{obs})$$

$F_{t(n-1)}(t)$ = Verteilungsfunktion für Student's t, für $n-1$ Freiheitsgrade

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

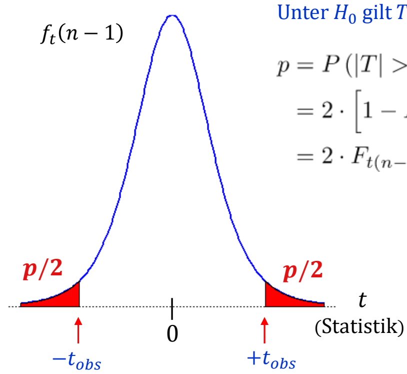
$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

www.matstat.org

Berechnung des p-Wertes, H_a: $\mu \neq \mu_0$

$X_i \sim N(\mu, \sigma)$ σ unbekannt H_0: $\mu = \mu_0$ H_a: $\mu \neq \mu_0$

Der p -Wert ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens so extreme Testresultate wie das aktuell beobachte, berechnet unter der Annahme dass die Nullhypothese wahr ist.



Unter H_0 gilt $T \sim t(n-1)$ positiv!

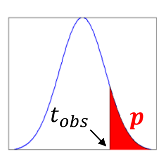
$$p = P(|T| > t_{obs}) = 2 \cdot P(T > |t_{obs}|)$$
$$= 2 \cdot \Big[1 - P(T \leq |t_{obs}|)\Big] = 2 \cdot \Big[1 - F_{t(n-1)}(|t_{obs}|)$$
$$= 2 \cdot F_{t(n-1)}(-|t_{obs}|)$$

$F_{t(n-1)}(t)$ = Verteilungsfunktion für Student's t, für $n-1$ Freiheitsgrade

www.matstat.org

t-Test mit R

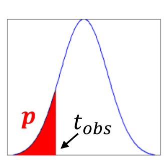
```
?t.test     # Hilfe
x = c(32.2, 32, 30.4, 31, 31.2, 31.2, 30.3, 29.6, 30.5, 30.8)
```



Hypothese $1-\alpha$

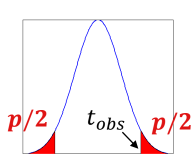
H_a: $\mu > \mu_0$

```
t.test(x, alternative = "greater", mu = 30, conf.level = 0.95)
```



H_a: $\mu < \mu_0$

```
t.test(x, alternative = ”less", mu = 30, conf.level = 0.95)
```



H_a: $\mu \neq \mu_0$

```
t.test(x, alternative = ”two.sided", mu = 30, conf.level = 0.95)
```

www.matstat.org

t-Test für zwei Stichproben

- testet eine Hypothese für den Unterschied $\Delta\mu$ der Erwartungswerte zweier normalverteilter Populationen
  - meist wird getestet ob $\Delta\mu = 0$
- Nullhypothese: H_0: $\mu_x - \mu_y = \Delta\mu_0$
  - $\Delta\mu_0$ meist 0, also H_0: $\mu_x = \mu_y$
- zwei Stichproben $\rightarrow \bar{x}_{obs}$; $\bar{y}_{obs}$; s_x ; s_y (Observation der Punktschätzer)

$X_i \sim N(\mu_x, \sigma_x)$ $\quad\sigma_x$ unbekannt $\quad x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ Stichprobe 1

$Y_i \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ $\quad\sigma_y$ unbekannt $\quad y = (y_1, y_2, \dots y_m)$ Stichprobe 2

$$s_y^2 = \frac{1}{n_y - 1}\sum_{i=1}^{n_y}(y_i - \bar{y})^2 \qquad s_x^2 = \frac{1}{n_x - 1}\sum_{i=1}^{n_x}(x_i - \bar{x})^2$$

Punktschätzer für σ_y^2 Punktschätzer für σ_x^2

Kritische Region, Fall a)

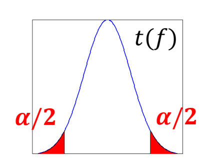
Fall a) Standardabweichungen unbekannt, jedoch gleich $\boldsymbol{\sigma_x = \sigma_y = \sigma}$ (schon behandelt für Intervallschätzung, siehe Vorlesung **F9**).

Teststatistik (unter H_0)
$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta\mu_0}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \sim t(n_x + n_y - 2)$$
$f = n_x + n_y - 2$ Freiheitsgrade

Observation
$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \bar{y}_{obs}}{s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$$
für H_0: $\Delta\mu_0 = 0$ ($\mu_x = \mu_y$)

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_x - 1)\cdot s_x^2 + (n_y - 1)\cdot s_y^2}{(n_x - 1) + (n_y - 1)}}$$
"pooled standard deviation"

$$T \sim t(f) \Rightarrow P\left(|T| > t_{\alpha/2}(f)\right) = \alpha$$



Kritische Regionen für zweiseitigen Test, Signifikansniveau α:

$$\Omega_\alpha = \left\{|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(f)\right\} \quad \text{für} \quad H_a : \Delta\mu \neq 0$$

(einseitige Tests analog, siehe Formelsammlung auf matstat.org)

Kritische Region, Fall b)

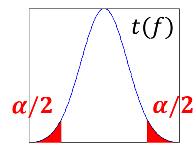
Fall b) Standardabweichungen unbekannt und ungleich $\boldsymbol{\sigma_x \neq \sigma_y}$
(Welch-Test, Smith-Satterthwaite-Test)

Teststatistik (unter H_0)
$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}} \sim t\,(f)$$
für H_0: $\Delta\mu_0 = 0$ ($\mu_x = \mu_y$)

Observation
$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \bar{y}_{obs}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}}$$
für H_0: $\Delta\mu_0 = 0$ ($\mu_x = \mu_y$)

$$f = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_x^2}{n_x}\right)^2}{n_x - 1} + \frac{\left(\frac{s_y^2}{n_y}\right)^2}{n_x - 1}}$$
Freiheitsgrade, abrunden wenn nicht ganzzahlig

$$T \sim t(f) \Rightarrow P\left(|T| > t_{\alpha/2}(f)\right) = \alpha$$



Kritische Regionen (zweiseitig), Signifikansniveau α:

$$\Omega_\alpha = \left\{|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(f)\right\} \quad \text{für} \quad H_a: \Delta\mu \neq 0$$

www.matstat.org

t-Test für zwei gepaarte Stichproben

Person	A	B	C	D	E	F	G	H
vorher	78.1	66.9	74.3	72.5	90.9	78.3	68.4	72.5
nachher	79.2	67.0	77.1	73.3	92.0	78.1	68.4	72.9

Modell für gepaarte Stichproben (Wiederholung von Vorlesung **F9**):

$$\left.\begin{array}{l} X_i \sim N(\mu_i, \sigma_x) \\ Y_i \sim N(\mu_i + \Delta\mu, \sigma_y) \end{array}\right\}$$
systematische Verschiebung $\Delta\mu$ zwischen beiden Gruppen

$Z_i = Y_i - X_i$ wird berechnet

$Z_i \sim N(\Delta\mu, \sigma_z)$ Verteilung der Z_i

$$\bar{Z} \sim N\left(\Delta\mu, \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}\right)$$
Verteilung für Mittelwert der Z_i

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \cdot \underbrace{\rho \cdot \sigma_x \sigma_y}}$$
Standardabweichung für σ_z (unbekannt)

$$C(X, Y) = \rho \cdot \sigma_x \sigma_y$$
Kovarianz zwischen X und Y

t-Test für zwei gepaarte Stichproben

- Nullhypothese: H_0: $\Delta\mu = \Delta\mu_0$
  - $\Delta\mu_0$ meist 0, also H_0: $\Delta\mu = 0$ (kein Unterschied)

$$\bar{Z} \sim N\left(\Delta\mu, \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}\right)$$ Verteilung für Mittelwert der Z_i

$$\frac{\bar{Z} - \Delta\mu_0}{\sigma_z/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$ σ_z ist jedoch unbekannt, daher $\sigma_z \to S_z$ wie gehabt

$$T = \frac{\bar{Z} - \Delta\mu_0}{S_z/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$ Teststatistik mit $S_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$

Observation $t_{obs} = \frac{\bar{z}_{obs}}{s_z/\sqrt{n}}$ für $\Delta\mu_0 = 0$ $\Rightarrow$ H_0: $\Delta\mu = 0$

$$\bar{z}_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \qquad s_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z}_{obs})^2$$

www.matstat.org

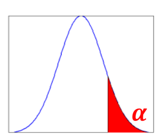
t-Test für zwei gepaarte Stichproben

Teststatistik $T = \frac{\bar{Z} - \Delta\mu_0}{S_z/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ Observation $t_{obs} = \frac{\bar{z}_{obs}}{s_z/\sqrt{n}}$

Wie gewohnt verwerfen wir die Nullhypothese, wenn eine Observation der Teststatistik T zu weit in Richtung der alternativen Hypothese liegt, also wenn sie das Quantil $t_\alpha(n-1)$ bzw. $t_{\alpha/2}(n-1)$ in Richtung der alternativen Hypothese überschreitet:

H_a: $\mu > \mu_0$ $\quad P(T > t_\alpha(n-1)) = \alpha$

Krit. Region $\quad \Omega_\alpha = \{t_{obs} > t_\alpha(n-1)\}$

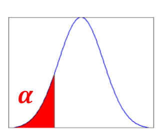


verwerfe H_0 wenn $t_{obs} > t_\alpha(n-1)$

Signifikansniveau α

H_a: $\mu < \mu_0$ $\quad P(T < -t_\alpha(n-1)) = \alpha$

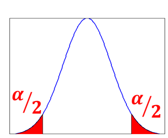
Krit. Region $\quad \Omega_\alpha = \{t_{obs} < -t_\alpha(n-1)\}$



verwerfe H_0 wenn $t_{obs} < -t_\alpha(n-1)$

H_a: $\mu \neq \mu_0$ $\quad P\left(|T| > t_{\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$

Krit. Region $\quad \Omega_\alpha = \left\{|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$



verwerfe H_0 wenn $|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(n-1)$

www.matstat.org

Zusammenfassung: t-Test für gepaarte Stichproben

$$\begin{aligned} X_i &\sim N(\mu_i, \sigma_x) \\ Y_i &\sim N(\mu_i + \Delta\mu, \sigma_y) \end{aligned}$$

$\sigma_{x,y}$ unbekannt H_0: $\Delta\mu = 0$

Teststatistik: $t_{obs} = \dfrac{\bar{z}_{obs}}{s_z/\sqrt{n}}$

$$z_i = y_i - x_i \qquad \bar{z}_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

$$s_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z}_{obs})^2$$

- Nullhypothese H_0: $\Delta\mu = 0$ (oder $\Delta\mu = \Delta\mu_0$)
- Alternative Hypothese H_a: $\Delta\mu \neq 0$ oder $\Delta\mu > 0$ oder $\Delta\mu < 0$
- Signifikansniveau festlegen, z. B. $\alpha = 0.05$
- Observation der Teststatistik berechnen $t_{obs} = \cdots$
- H_0 verwerfen wenn t_{obs} in der kritischen Region Ω_α liegt.

H_a: $\mu > \mu_0$ $\quad \Omega_\alpha = \{t_{obs} > t_\alpha(n-1)\}$

H_a: $\mu < \mu_0$ $\quad \Omega_\alpha = \{t_{obs} < -t_\alpha(n-1)\}$

H_a: $\mu \neq \mu_0$ $\quad \Omega_\alpha = \{|t_{obs}| > t_{\alpha/2}(n-1)\}$

t-Test mit R

Hypothese $\quad 1-\alpha$

Eine Stichprobe, H_0: $\mu = \mu_0$; H_a: $\mu \neq \mu_0$

```
t.test(x, alternative = "two.sided", mu = 7500, conf.level = 0.95)
```

Zwei Stichproben, gleiche Varianzen, H_0: $\mu_x = \mu_y$; H_a: $\mu_x \neq \mu_y$

```
t.test(x, y,  alternative = "two.sided", mu = 0, var.equal = TRUE, conf.level = 0.95)
```

Zwei Stichproben, ungleiche Variansen, H_0: $\mu_x = \mu_y$; H_a: $\mu_x \neq \mu_y$

```
t.test(x, y,  alternative = "two.sided", mu = 0, var.equal = FALSE, conf.level = 0.95)
```

Zwei gepaarte Stichproben, H_0: $\Delta\mu = 0$; H_a: $\Delta\mu \neq 0$

```
t.test(x1, y1,  alternative = "two.sided", paired = TRUE , mu = 0, conf.level = 0.95)
```

Sind X, Y normalverteilt?:

```
hist(x, col="red")     # histogram, sollte ungefähr wie eine Normalverteilung aussehen
qqnorm(x);  qqline(x, col = "red")   #  Punkte sollten ungefähr auf der roten Linie liegen
# Normalverteilung zurückweisen: ad.test (library(nortest) ; ks.test ; shapiro.test
```

Anhang

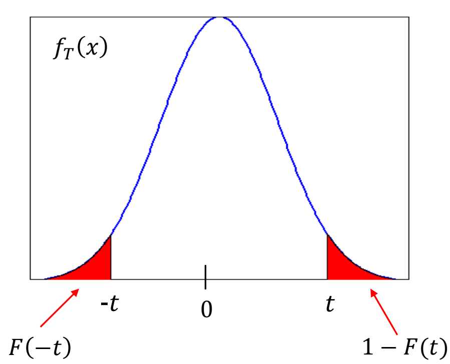
Testen von Hypothesen, Teil II

Uwe Menzel, 2018
uwe.menzel@matstat.org
www.matstat.org

Symmetrie und Verteilungsfunktion

Wenn die Dichtefunktion symmetrisch um den Nullpunkt ist [z.B. N, $t(f)$] gilt für die Verteilungsfunktion:

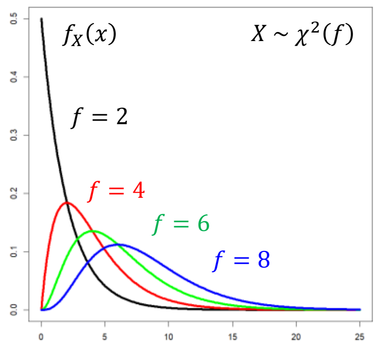
$$F(-t) = 1 - F(t)$$



Die Chi-Quadrat-Verteilung

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Dies gilt allgemein wenn die X_i unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit der Standardabweichung σ sind.



Dichtefunktion von χ^2 für verschiedene Freiheitsgrade f.
Die Observationen X_i müssen von einer Normalverteilung kommen.

$$X_i \sim N(\mu, \sigma)$$

www.matstat.org

Die t-Verteilung

(Student'sche Verteilung)

William Gosset
(Student")

Voraussetzungen: $Z \sim N(0,1)$

$W \sim \chi^2(\nu)$

Wenn die Zufallsvariablen Z und W obenstehende Verteilungen haben und unabhängig sind, dann hat der folgende Quotient die sogenannte t-Verteilung:

$$\boxed{\frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{\nu}}} \sim t(\nu)}$$

t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu+1}{2})}$$

Dichtefunktion

www.matstat.org

Student'sche t-Verteilung

- $Z \sim N(0,1)$ standardisierte Normalverteilung
- $W \sim \chi^2(\nu)$ Chi-Quadrat-Verteilung, sei $\nu = n - 1$ (Freiheitsgrade)
- Z und W unabhängig

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad W = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{\nu}}} = \frac{\frac{(\bar{X}-\mu_0)\cdot\sqrt{n}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2\cdot(n-1)}}} = \frac{(\bar{X}-\mu_0)\cdot\sqrt{n}}{S} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Die linke Seite ist $t(n-1)$ – verteilt, also muss das auch für die rechte Seite gelten:

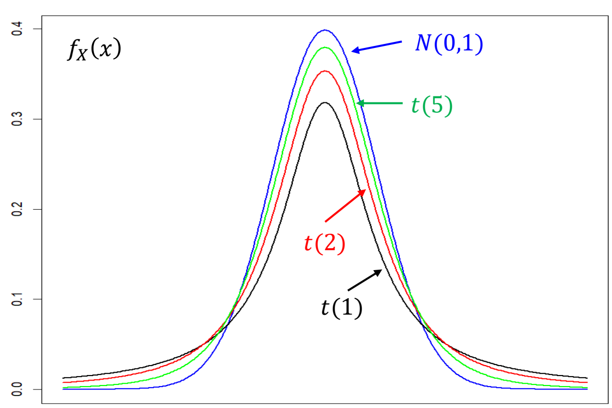
$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Die Zufallsvariablen X_i müssen normalverteilt und unabhängig sein.

www.matstat.org

Die Studentsche t-Verteilung

Dichtefunktion für die t-Verteilung für verschiedene Freiheitsgrade und Vergleich mit $N(0,1)$

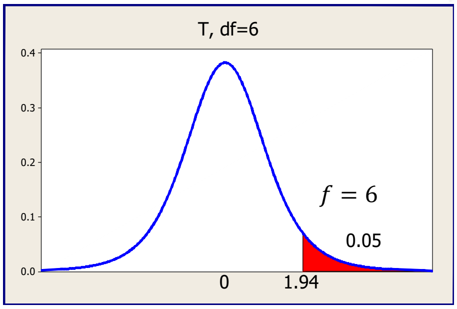


$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu+1}{2})}$$

Dichtefunktion
ν = Anzahl der Freiheitsgrade

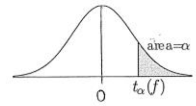
www.matstat.org

Quantile für die t-Verteilung



Die t-Verteilung ist etwas breiter als N, aber je größer n wird, desto ähnlicher werden sie (siehe letzte Reihe der Tabelle).

$$P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$$
$$X \in t(f)$$



f \ α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

t-Test, Kritische Regionen

Teststatistik $\quad t_{obs} = \dfrac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

H_0: $\mu = \mu_0$

H_a	Test	kritische Region
$\mu > \mu_0$	einseitig	$\Omega_\alpha = \{t > t_\alpha(n-1)\}$

H_a	Test	kritische Region
$\mu < \mu_0$	einseitig	$\Omega_\alpha = \{t < -t_\alpha(n-1)\}$

H_a	Test	kritische Region
$\mu \neq \mu_0$	zweiseitig	$\Omega_\alpha = \left\{\lvert t\rvert > t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$