

OBS! Lösningar ska vara motiverade. Välj lämpliga beteckningar för sannolikheter och andra förekommande storheter.

Uppgift 1 6 poäng

En sex-sidig tärning har förändrats så att sannolikheten att kasta ett tal är proportionell mot detta tal. Låt det erhållna ögontalet vid ett kast vara slumpvariabeln X .

- Ange sannolikhetsfunktionen för X på ett lämpligt sätt.
- Ange fördelningsfunktionen för slumpvariabeln X .
- Ange väntevärdet och variansen för X .
- Låt händelsen A vara att det kastas ett jämnt tal. Ange sannolikheten $P(A)$.
- En person kastar tärningen 10 gånger och adderar alla ögontalen. Låt slumpvariabeln Y vara resultatet av additionen. Ange väntevärdet $E(Y)$ och standardavvikelsen $D(Y)$.

Uppgift 2 5 poäng

I en viss population finns 60% kvinnor och 40% män. I denna population lider 5 % av alla män och 1% av alla kvinnor av diabetes.

- Man väljer slumpmässigt en person ur denna population. Hur stor är sannolikheten att denna person har diabetes?
- Är händelserna K ("en slumpmässigt vald person är en kvinna") och D ("en slumpmässigt vald person lider av diabetes") oberoende händelser? Vad betyder det erhållna resultatet?
- Det har visat sig att en slumpmässigt vald person lider av diabetes. Med vilken sannolikhet är denna person en kvinna? Med vilken sannolikhet är denna person en man? Beteckna förekommande sannolikheter korrekt.

Uppgift 3 2 poäng

Flera års erfarenhet säger att längden av ett telefonsamtal (som betecknas med slumpvariabel X) i ett callcenter är fördelad med följande täthetsfunktion (tidsenhet: minuter):

$$f_X(t) = \begin{cases} 0.1 \cdot e^{-0.1 \cdot t} & \text{om } t > 0, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Med vilken sannolikhet dröjer ett samtal längre än 15 minuter?

Uppgift 4 6 poäng

En maskin framställer sockerbitar och förpackar 100 stycken i varje ask. Vikten av en sockerbit är en normalfördelad slumpvariabel X med väntevärdet 3 och standardavvikelsen 0.15 (allt i gram). Sockerbitarnas vikter antas vara oberoende av varandra.

- Man väljer slumpmässigt en sockerbit. Hur stor är sannolikheten att vikten av denna ligger mellan 2.85 och 3.15 gram?
- Hur stor är sannolikheten att en sockerbit blir tyngre än 3.3 gram?
- Hur stor är sannolikheten att nettovikten av en förpackning med 100 sockerbitar blir större än 303 gram ?
- Hur stor är sannolikheten att det aritmetiska medelvärdet av 25 sockerbitars vikter blir större än 3.03 gram ?

Uppgift 5 7 poäng

Låt oss anta att 5% av befolkningen har en viss förändring i arvsmassan som dessbättre vanligtvis inte förorsakar någon sjukdom (ingen "fenotyp").

- Man tar ett stickprov av storlek n ur denna befolkning och räknar hur många i stickprovet som bär på denna förändring. Låt detta antal vara slumpvariabeln X . Hur är X fördelad?
- Man väljer slumpmässigt 10 personer ur denna befolkning; Hur stor är sannolikheten att få ingen, en eller två personer med denna förändring?
- Om man slumpmässigt väljer 10 personer: Hur stor är sannolikheten att få fler än två personer med denna förändring?
- Antag att man undersöker 1000 personer. Låt X vara antalet personer bland de 1000 som har denna förändring. Ange väntevärdet och standardavvikelsen för X .
- Antag att man undersöker 1000 personer. Hur stor är sannolikheten att hitta fler än 30 personer med denna förändring?

Uppgift 6 8 poäng (Observera att deluppgifterna kan lösas oberoende av varandra)

Kroppens syreupptagningsförmåga hos människor är viktig för det allmänna hälsotillståndet och mäts i liter per minut. Ett stort värde är bra. Erfarenhet visar att syreupptagningsförmågan kan antas vara normalfördelad.

- I en grupp bestående av 5 personer mättes syreupptagningsförmågan. Man erhöll följande resultat: (2.45, 2.2, 2.05, 2.23, 2.62). Ange ett 95% konfidensintervall för väntevärdet av den underliggande fördelningen. Beskriv med en eller två meningar vad det erhållna resultatet betyder.
- En annan grupp bestående av 6 personer genomförde en speciell konditionsträning för att förbättra syreupptagningsförmågan. Man erhöll det aritmetiska medelvärdet $\bar{y} = 2.51$ och stickprovsstandardavvikelsen $s_y = 0.21$. Konstruera ett 95% konfidensintervall för skillnaden mellan väntevärdena i de båda grupperna (variansen får antas vara densamma för båda grupperna). Kan detta resultat betecknas som tillfredställande (motivera)?
- Efter utvärderingen av resultatet i b) beslutades att genomföra en ny undersökning. Hos 5 personer mättes syreupptagningsförmågan *före* och *efter* träningen. Man erhöll följande resultat:

Person	1	2	3	4	5
före	2.25	2.50	1.95	2.40	2.40
efter	2.40	2.70	2.20	2.55	2.65

Beräkna ett 95% konfidensintervall för skillnaden mellan väntevärden före och efter träningen. Förändringen av väntevärdet genom träning kan antas vara densamma för alla personer. Jämför bredden av detta konfidensintervall med bredden som erhöles i b). Motivera anledningen till skillnaden.

Uppgift 7 6 poäng

Mjölkkproducenten *LARA* har undersökt om det finns ett samband mellan andelen av ett visst kraftfoder i näringen och den dagliga mjölkproduktionen hos kor. Man har varierat andelen kraftfoder och mätt den genomsnittliga mjölkproduktionen hos korna. Man erhöles följande resultat (mjölkproduktion i liter per dygn):

andel kraftfoder	0.05	0.1	0.2	0.25	0.3
mjölkproduktion	15	21	27	28	34

- Illustrera materialet grafiskt. Vilken modell skulle du använda för att hitta ett samband mellan kraftfoderandel och mjölkproduktion?
- Ange en punktskattning för lutningen av regressionslinjen.
- Ange ett 95% konfidensintervall för lutningen.